INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BACĂU

Simularea județeană a examenului național de bacalaureat 2023
Februarie 2023
Barem de evaluare și notare
Matematică M_mate-info

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct , dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{8} < \sqrt{9} < \sqrt{16}$ $3 < \log_{\sqrt{2}} 3 < 4$, deci $\left[\log_{\sqrt{2}} 3\right] = 3$	**2p** **3p**
2.	$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m > 0$ $m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$	**3p** **2p**
3.	Ecuația dată este echivalentă cu ecuația $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$. Notăm $3^x = y,\ y > 0$. Obținem ecuația $y^2 - 10 \cdot y + 9 = 0$ cu soluțiile pozitive $y_1 = 1, y_2 = 9$. Mulțimea soluțiilor ecuației date este $S = \{0,2\}$	**3p** **2p**
4.	Numărul de elemente din M este $4^4 = 256$ (nr. de cazuri posibile) Cazurile favorabile sunt de tipul: pppp, iiii, piii, ippp, pppi, iiip, ppii, iipp, piip, ippi, fiecare câte 16, în total 160 de cazuri favorabile. P= $\frac{160}{256}$	**2p** **2p** **1p**
5.	Fie d' dreapta cu proprietatea dată. Deoarece $d' \parallel d \Rightarrow m_{d'} = m_d$ $d: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_{d'} = m_d = \frac{1}{2}$ Obținem $d': x - 2y + 6 = 0$	 **2p** **3p**
6.	$\sin x = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}$ $1 + \cos x = 2cos^2\frac{x}{2}$ $\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}} = tg\ \frac{x}{2}$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	**a)** $A(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+3 & 1+3 & 4 \\ 1^2-1+1 & 1^2-1+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 24 & 24 & 24 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} = 6A(1,1)$	**2p** **3p**
	b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+3 & y+3 & 4 \\ x^2-x+1 & y^2-y+1 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_2 - 3L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \\ x^2-x+1 & y^2-y+1 & 1 \end{vmatrix}$ $\overset{L_3 - L_1 + L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \\ x^2 & y^2 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(y-1)(y-x)$	**2p** **3p**

	c) ecuația are soluție unică $\leftrightarrow detA(2^m, 3^n) \neq 0$ $(2^m-1)(3^n-1)(3^n-2^m) \neq 0 \leftrightarrow (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$	**2p** **3p**
2.	**a)** $z*(2-i)=(z-1+i)(2-i-1+i)+1-i=(z-1+i)1+1-i=z$. $(2-i)*z=z$, deci $e=2-i$	**2p** **3p**
	b) comutativitatea legii de compoziție $z*(4+i)=(z-1+i)(4+i-1+i)+1-i=2-i$ $z=1-i+\frac{1}{3+2i}=\frac{16-15i}{13}$	**1p** **2p** **2p**
	c) $\lvert z-1+i\rvert=1 \rightarrow z=1-i+\cos x+i\,sin\,x$, unde $x \in \mathbb{R}$. $\lvert z_1*z_2-1+i\rvert=\lvert(z_1-1+i)(z_2-1+i)+1-i\ -1+i\rvert=$ $\lvert(1-i+\cos x+i\,sin\,x-1+i)(1-i+\cos y+i\,sin\,y-1+i)\rvert=$ $\lvert(\cos x+i\,sin\,x)(\cos y+i\,sin\,y)\rvert$=1, deci H este parte stabilă	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	**a)** Folosind regula lui $l'Hospital$ obținem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{lnx}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$ Deducem că dreapta $y=0$ este asimptotă spre ∞ la graficul funcției	**3p** **2p**
	b) Funcția este derivabilă și $f'(x)=\frac{2-lnx}{2x\sqrt{x}}, \forall\, x>0$. Ecuația $f'(x)=0$ are soluția $x=e^2$. Obținem $f'(x)>0, \forall x \in (0,e^2)$ și $f'(x)<0, \forall x \in (e^2,+\infty)$. Din consecința teoremei lui Lagrange rezultă că f este stict crescătoare pe $(0,e^2]$ și strict descrescătoare pe $[e^2,+\infty)$	**2p** **3p**
	c) Observăm că $0<3<5<e^2$. Cum f este strict crescătoare pe $(0,e^2]$ obținem $f(3)<f(5)$ Deducem că $\frac{ln3}{\sqrt{3}}<\frac{ln5}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$.	**3p** **2p**
2.	**a)** Funcția f este continuă , deci admite primitive. Fie $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a sa . Avem că $F'(x)=f(x)=\sqrt{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare F' este derivabilă și $F''(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R}$. Cum $F''(x)>0, \forall x \in (0,+\infty)$ rezultă că F este strict convexă pe $(0,+\infty)$.	 **3p** **2p**
	b) $I=\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ $\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big\rvert_{-1}^{1}=2ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\limits_{-1}^{1}x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx=x\sqrt{x^2+1}\Big\rvert_{-1}^{1}-I=2\sqrt{2}-I$ Obținem I=$\sqrt{2}+ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.	**2p** **1p** **1p** **1p**
	c) Fie $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx\,, n \in \mathbb{N}^*$. Din punctul a) obsevăm că f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $x \in (0,+\infty)$ astfel încât $n \leq x \leq n+1$ obținem că	**1p**

	$f(n) \leq f(x) \leq f(n+1)$ Se obține $f(n) \leq I_n \leq f(n+1)$, de unde rezultă că $\frac{f(n)}{n} \leq \frac{I_n}{n} \leq \frac{f(n+1)}{n}$,$\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{n} = 1$, din criteriul cleștelui rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\int_n^{n+1} f(x)dx}{n}$ =1.	**2p** **2p**