Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $a+ib$ este conjugatul numărului complex $z=\dfrac{1+i}{1-i}$.

5p **2.** Determinați numărul real pozitiv m pentru care dreapta $x=2$ este axă de simetrie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-\left(m^2-1\right)x+3$.

5p **3.** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\sqrt[3]{1+7x}=1+x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$, elementele submulțimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(4,1)$. Determinați coordonatele punctului M știind că $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=AC=5$ și $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\left(A(x)-A(y)\right)^{2023}=O_3$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(x)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

2. Se notează cu x_1,x_2,x_3,x_4 rădăcinile polinomului $f=X^4-3X^2+2X+1$.

5p **a)** Determinați restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X-2$.

5p **b)** Arătați că polinomul f nu are rădăcini raționale.

5p **c)** Arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}=-8$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-2x}{e^x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $(2x+1)\sqrt{e}\le 2e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge 1}$, $I_n=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx$.

5p **a)** Calculați I_2.

5p **b)** Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este convergent.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$, pentru orice $n\ge 2$.