Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați a_{2023}, știind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică cu $a_1=2023$ și $r=-1$.

5p **2.** Arătați că $x_1+x_2+2x_1x_2=23$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-3x+10=0$.

5p **3.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^{x+1}-1$ cu axele Ox și respectiv Oy.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu 2 elemente ale mulțimii $\{1,2,3,...,9\}$, aceasta să fie formată doar din numere prime.

5p **5.** Calculați $\vec{a}\cdot\vec{b}$, știind că $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ și unghiul vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ are măsura $\frac{\pi}{3}$.

5p **6.** Arătați că $2\sqrt{2}\,\text{tg}\,x+1=0$, știind că $\sin x=\frac{1}{3}$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2))$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătați că $\det(A(1)+A(2)+...+A(n))=\frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$, pentru orice număr natural nenul n.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+(m-3)X^2-17X+(2m+7)$, cu $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X-1$.

5p **b)** Pentru $m=4$ arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1^2+x_2^2+x_3^2=-62$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^x+9^x-17\cdot 3^x+15=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}-x-2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}-1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că imaginea funcției f este intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$.

5p **a)** Calculați $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx=\frac{4}{3}-\ln 2$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $\dfrac{1}{2}+\ln\left(n^2+n\right)$.