Examenul național de bacalaureat 2023
Simulare județeană
Proba Ec)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Dacă $z^2+z+1=0$, unde z este număr complex, arătați că $z^{2023}+\frac{1}{z^{2023}}=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{2023x\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x. Arătați că $f\left(x+\frac{1}{2023}\right)=f(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-5\cdot 2^x+4=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre , aceasta să nu conțină cifra 2.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $A(1,2)$, $B(4,5)$ și $D(-3,2)$. Determinați ecuația dreptei MN, știind că segmentul MN este linie mijlocie a trapezului $ABCD$.

5p **6.** Știind că $\text{tg}a=\sqrt{3}$ și $a\in\mathbb{R}$, arătați că $\frac{\sin a-\cos a}{\sin a+\cos a}=2-\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II- lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^x\end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

5p **a)** Determinați $\det\big(A(10)\big)$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x, știind că $A(x)\cdot A(2x)=A(x^2+2)$.

5p **c)** Știind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(2022)$, demonstrați că n este număr natural divizibil cu 2023.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție:
$x*y=3xy-3x-3y+4$. Legea „$*$” este asociativă și are element neutru.

5p **a)** Arătați că $x*y=3(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $\frac{1}{1011}*\frac{2}{1011}*\frac{3}{1011}*\ldots*\frac{2023}{1011}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea „$*$”.

SUBIECTUL al III- lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}$, definite prin $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+2}$.

5p **a)** Determinaţi ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.

5p **b)** Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei f.

5p **c)** Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_1=2$ *şi* $a_{n+1}=f(a_n), pentru\ n\geq 1, n\in N$. Studiaţi convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ şi în caz de convergenţă, calculaţi limita şirului.

2. Se consideră funcţiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=arctgx, F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Arătați că funcţia F este convexă pe **R**.

5p **b)** Determinați primitiva G a funcţiei g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, g(x)=xf(x) cu proprietatea că graficul lui G contine punctul A$(1,-\frac{1}{2})$.

5p **c)**Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x^2)}{x^4}$.