EXAMENUL DE BACALAUREAT 2023
Proba E.c) Matematică M_mate-info, Simulare județeană
Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică
• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
• Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Demonstraţi că $10^{\lg 2}+\sqrt[3]{-64}+\left[\frac{123}{7}\right]=15$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

5p **2.** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Demonstraţi că numărul $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(30)$ este pătrat perfect.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2x+1+2\sqrt{2x+1}=15$.

5p **4.** Câte numere naturale de forma $\overline{ab2c}$ au suma cifrelor egală cu 5 ?

5p **5.** În triunghiul ABC, punctele M, N şi P sunt mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB. Arătaţi că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

5p **6.** În triunghiul ABC măsurile unghiurilor A și B sunt de 45^0, respectiv 105^0 şi $AB=3\sqrt{3}$. Calculaţi lungimea laturii BC.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $rang\,A$.

5p **b)** Să se arate că $A^n=14^{n-1}A,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că inversa matricei I_3-A este $I_3-\frac{1}{13}A$.

2. Pe $\mathbb{R}$ considerăm legea "$\circ$" definită prin $x\circ y=5xy-30x-30y+186$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$. Se ştie că această lege este asociativă şi comutativă.

5p **a)** Demonstraţi că $x\circ y=5(x-6)(y-6)+6$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$;

5p **b)** Determinaţi un element $a\in\mathbb{R}$ pentru care $x\circ a=a\circ x=a$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$;

5p **c)** Dacă $d_1,d_2,...,d_n$ sunt divizorii întregi ai numărului 2022 calculaţi $d_1\circ d_2\circ...\circ d_n$.

SUBIECTUL III **(30 puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

5p **a)** Demonstraţi că ecuaţia $f'(x)=0$ are o singură soluţie în intervalul $(1,\infty)$;

5p **b)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f;

5p **c)** Demonstraţi că $f(\lg 99)+f(\lg 101)<f(\lg 97)+f(\lg 103)$.

2. Fie funcţia $f_{p,q}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_{p,q}(x)=(\sin x)^p\cdot(\cos x)^q$, unde $p,q\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Demonstraţi că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=-\dfrac{1}{4}\cos 2x$ este o primitivă a funcţiei $f_{1,1}$;

5p **b)** Calculaţi $\int_0^{\pi/2} f_{3,1}(x)\,dx$;

5p **c)** Fie F o primitivă a funcţiei $f_{2022,2023}$. Demonstraţi că există un număr real k astfel încât $F(x+2\pi)-F(x)=k$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.