Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul orespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I		**(30 puncte)**
1.	$a_1 = a_2 - r = 7 - 4 = 3$ $a_{10} = a_1 + 9r = 3 + 9 \cdot 4 = 39$	**2p** **3p**
2.	$A(-2, 5) \in G_f \Leftrightarrow f(-2) = 5 \Leftrightarrow 3 \cdot 4 - 2b + 1 = 5 \Leftrightarrow b = 4$. Obținem $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$. $(f \circ f)(-1) = f(f(-1)) = f(0) = 1$.	**3p** **2p**
3.	$\log_3((2x+1)(x+2)) = \log_3(x^2+2) \Rightarrow (2x+1)(x+2) = x^2 + 2 \Rightarrow x \in \{0, -5\}$ Convine doar $x = 0$.	**3p** **2p**
4.	$T_3 = T_{2+1} = C_4^2 \cdot \left(2^{x-1}\right)^{4-2} \cdot 3^2 = 6 \cdot 2^{2x-2} \cdot 9 = 54 \cdot 2^{2x-2}$. $T_3 = 54 \Leftrightarrow 2^{2x-2} = 1 \Leftrightarrow x = 1$	**3p** **2p**
5.	$\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel $\left(AB = BC = \sqrt{20},\ AC = \sqrt{40}\right)$ cu ipotenuza AC. $m\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right) = 45^\circ$	**3p** **2p**
6.	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84\ \text{cm}^2$. $S = \frac{BA \cdot BC \cdot \sin B}{2} \Leftrightarrow 84 = \frac{15 \cdot 14 \cdot \sin B}{2} \Leftrightarrow \sin B = \frac{4}{5}$.	**2p** **3p**

SUBIECTUL II		**(30 puncte)**
1.a)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^y \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^x \cdot 2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{x+y} \end{pmatrix} = A(x+y)$	**2p** **3p**
b)	Fie $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. $B \cdot A(6) = A(6) \cdot B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 64y \\ z & 64t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 64z & 64t \end{pmatrix}$ Rezultă $y = z = 0$. Așadar $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, unde $a = x, b = t$.	**3p** **2p**
c)	$X^3 = X \cdot A(6) = A(6) \cdot X$. Rezultă că $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$, de unde obținem $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 64 \end{cases}$. $X \in \left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\right\}$	**2p** **3p**

2.a)	$(x*y)*z=\dfrac{x+y}{1+xy}*z=\dfrac{\dfrac{x+y}{1+xy}+z}{1+\dfrac{x+y}{1+xy}\cdot z}=\dfrac{xyz+x+y+z}{xy+yz+zx+1}$ (1) $x*(y*z)=x*\dfrac{y+z}{1+yz}=\dfrac{x+\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+x\cdot\dfrac{y+z}{1+yz}}=\dfrac{xyz+x+y+z}{xy+yz+zx+1}$. (2) Din relațiile (1) și (2) rezultă că legea e asociativă.	**2p** **3p**
b)	$f(x*y)=\dfrac{1-x*y}{1+x*y}=\dfrac{1-\dfrac{x+y}{1+xy}}{1+\dfrac{x+y}{1+xy}}=\dfrac{xy-x-y+1}{xy+x+y+1}$. $f(x)\cdot f(y)=\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{1-y}{1+y}=\dfrac{xy-x-y+1}{xy+x+y+1}$, rezultând imediat concluzia.	**3p** **2p**
c)	„*” fiind lege de compoziție, rezultă că $x*y\in G=(-1,1)$. Cum $x*y\in\mathbb{Z}$, deducem că $x*y=0$ și de aici $x+y=0$. Rezultă $y=-x$.	**2p** **3p**

SUBIECTUL III		**(30 puncte)**
1.a)	Pentru orice număr real x, funcția f este derivabilă și $f'(x)=\left(e^x-x\right)'=e^x-1$ $f(x)-f'(x)=\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)=1-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.	**3p** **2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ și se alcătuiește tabelul de variație. f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ și crescătoare pe $[0,+\infty)$.	**3p** **2p**
c)	Din tabelul de variație rezultă că $f(0)=1$ este minimul funcției f și de aici $e^x-x\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. În inegalitatea $e^x\geq 1+x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ înlocuind x cu $-x$ rezultă $e^{-x}\geq 1-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Înmulțind cu e^x se obține $e^x(1-x)\leq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.	**2p** **3p**
2.a)	F este derivabilă și $F'(x)=(x\cdot\ln x)'=x\cdot(\ln x)'+x'\cdot\ln x=$ $=x\cdot\dfrac{1}{x}+\ln x=1+\ln x=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.	**3p** **2p**
b)	Fie F_1 primitiva căutată. Diferența între două primitive ale aceleiași funcții fiind o constantă, rezultă că există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x)=F(x)+c,\ \forall x\in(0,+\infty)$. $F_1(e)=e+1\Leftrightarrow F(e)+c=e+1\Leftrightarrow e\cdot\ln e+c=e+1\Leftrightarrow c=1$. Așadar $F_1:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F_1(x)=x\cdot\ln x+1$.	**2p** **3p**
c)	$\int\dfrac{1}{x\cdot e^{f(x)}}dx=\int\dfrac{1}{x\cdot e^{1+\ln x}}dx=$ $=\int\dfrac{1}{x\cdot e\cdot x}dx=\dfrac{1}{e}\cdot\int\dfrac{1}{x^2}dx=-\dfrac{1}{e\cdot x}+\mathcal{C}$.	**2p** **3p**