Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p **1.** În progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, rația este $r=4$, iar $a_2=7$. Aflați a_{10}.

5p **2.** Fie numărul real b, astfel încât punctul $A(-2,5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+bx+1$. Calculați $(f\circ f)(-1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x+1)+\log_3(x+2)=\log_3\left(x^2+2\right)$.

5p **4.** Aflați numărul real x, știind că al treilea termen al dezvoltării $\left(2^{x-1}+3\right)^4$ este egal cu 54.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(4,5)$ și $C(8,3)$. Determinați măsura unghiului dintre vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Într-un triunghi ABC se cunosc $BC=14$ cm, $AC=13$ cm și $AB=15$ cm. Calculați $\sin B$.

SUBIECTUL II **(30 puncte)**

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^x\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x, y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că dacă $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $B\cdot A(6)=A(6)\cdot B$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $B=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$.

5p **c)** Rezolvați ecuația matriceală $X^2=A(6)$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pe $G=(-1,1)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$ și fie $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$.

5p **a)** Demonstrați că legea de compoziție este asociativă.

5p **b)** Arătați că $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, oricare ar fi $x, y\in G$.

5p **c)** Demonstrați că dacă $x, y\in G$ și $x*y\in\mathbb{Z}$, atunci $y=-x$.

SUBIECTUL III **(30 puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Arătați că $f(x)-f'(x)=1-x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Stabiliți intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $e^x\cdot(1-x)\leq 1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f, F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\ln x$ și $F(x)=x\cdot\ln x$.

5p **a)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Determinați primitiva funcției f, a cărei reprezentare grafică trece prin punctul $A(e,e+1)$.

5p **c)** Calculați $\displaystyle\int\frac{1}{x\cdot e^{f(x)}}\,dx$.