Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică M_*şt-nat*
Simulare județeană, 16 decembrie 2025

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

(5p) **1.** Se dă numărul complex $z = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}i$. Calculați modulul numărului z^4.

(5p) **2.** Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ și progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_1 = b_1 = 1$, $b_3 - a_3 = 2$ iar cele două progresii au aceeași rație pozitivă. Să se calculeze $b_4 - a_4$.

(5p) **3.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $4^{x+1} = 3 \cdot 4^x + 2^x + 6$.

(5p) **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 3.

(5p) **5.** Pătratul $ABCD$ are lungimea laturii $AB = \sqrt{2}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

(5p) **6.** Triunghiul ABC are aria $S = 9$, $AC = 6$ și $BC = 2\sqrt{3}$. Aflați măsura unghiului C.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Dacă $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se cere:

(5p) **a)** Calculați $det\, A$ și $det(A^3)$;

(5p) **b)** Să se afle A^n, $n \in \mathbb{N}^*$;

(5p) **c)** Să se determine matricea X, cu elemente numere reale, astfel încât $(A + I_3)X = O_{3,1}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată prin

$$x * y = \frac{(2x-1)(2y-1)+1}{2}, (\forall) x, y \in \mathbb{R}.$$

(5p) **a)** Arătați că legea de compoziție admite elementul neutru $e = 1$;

(5p) **b)** Determinați elementele simetrizabile din $\mathbb{R}$ în raport cu $"*"$;

(5p) **c)** Calculați $A = \frac{1}{\sqrt{1}} * \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{3}} * \ldots * \frac{1}{\sqrt{2026}}$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Fie funcția $f: (-\infty, -6] \cup [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$.

(5p) **a)** Calculați $f'(x)$;

(5p) **b)** Arătați că $\lim\limits_{x \to -8} \frac{f(x)-f(-8)}{x+8} = -\frac{5}{4}$;

(5p) **c)** Determinați asimptotele oblice ale funcției.

2. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$.

(5p) **a)** Calculați $\int \frac{f(x)}{x^3} dx$;

(5p) **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict descrescătoare pe $(0,1)$;

(5p) **c)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = -\frac{10}{9}$.