Examenul național de bacalaureat 2025 – simulare județeană
Proba E. c)
Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\lg(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)-1=3\lg2+2\lg3$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+2x-3$, unde m este un număr real și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+3$. Dacă M este punctul în care graficul funcției g intersectează axa Ox, atunci determinați numărul real m astfel încât punctul M să aparțină și graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 3.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, $\alpha\in(0,+\infty)$, punctele M, N și P astfel încât $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC}=\alpha\overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{CA}=\alpha\overrightarrow{CP}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

5p **6.** Arătați că $\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{5\pi}{6}\cos\frac{5\pi}{3}=0$.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}m+1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & m+1\\ 1 & m+1 & -2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}(m+1)x-2y+z=m\\ -2x+y+(m+1)z=3m+3,\\ x+(m+1)y-2z=2m-3\end{cases}$ unde m este un număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $A(m)$ este inversabilă dacă și numai dacă $m\neq0$.

5p **c)** Pentru $m\neq0$, demonstrați că singura soluție a sistemul de ecuații este $x=1$, $y=2$ și $z=3$.

2. Pe mulțimea $M=[-1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy+x+y$, pentru orice $x, y\in M$.

5p **a)** Verificați dacă $x*y=(x+1)(y+1)-1$, pentru orice $x, y\in M$.

5p **b)** Dacă $x\in M$ și $x\neq-1$, atunci demonstrați că există $x'\in M$ și $x\neq-1$, astfel încât $x*x'=0$.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x\ln x-(1-x)\ln(1-x)$.

5p **a) a)** Verificați dacă $f'(x)=\ln\frac{1-x}{x}$, oricare ar fi $x\in(0,1)$.

5p **b) b)** Arătați că $\lim\limits_{x\searrow0}f(x)=0$.

5p **c)** Dacă $a,b\in(0,1)$ și $a+b=1$, atunci demonstrați că $a\ln a+b\ln b\geq \ln\frac{1}{2}$.

2. Pentru orice număr natural nenul n, se consideră funcția $f_n:[0,\ 1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n\sqrt{x+1}$, iar șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, este definit prin $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f_2(x)}{\sqrt{x+1}}dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătați că $I_1=\frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}$.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+3)I_n+2nI_{n-1}=4\sqrt{2}$, pentru orice număr natural nenul n.