Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE SI DE NOTARE

Simulare 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(x+i\sqrt{2}\right)\left(1-i\sqrt{2}\right)=\left(x+2\right)+i\sqrt{2}\left(1-x\right)$	**3p**
	Trebuie ca $1-x=0$ și $x+2\in\mathbb{Z}$. Obținem $x=1$	**2p**
2.	$\Delta=9-8m$	**2p**
	G_f intersectează Ox în două puncte distincte $\Leftrightarrow$ ecuația $f\left(x\right)=0$ are două soluții reale $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow m\in\left(-\infty,\frac{9}{8}\right)$	**3p**
3.	$\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3=\left(x+2\right)^3$ de unde obținem $\left(x+2\right)\left[\left(x+2\right)^2-1\right]=0$	**3p**
	Rezultă $\left(x+2\right)\left(x+1\right)\left(x+3\right)=0$, de unde $x\in\left\{-3,-1,-2\right\}$, care convin	**2p**
4.	Sunt 2027 de numere în M, deci numărul cazurilor posibile este 2027 Numărul multiplilor lui 26 este dat de numărul valorilor $n\in\mathbb{N}$ care au proprietatea că $0\le 26n\le 2027 \Leftrightarrow 0\le n\le\frac{2027}{26} \Leftrightarrow n\in\left\{0,1,2,\ldots,77\right\}$, deci avem 78 de cazuri favorabile.	**2p**
	Probabilitatea cerută este $\frac{78}{2027}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$ Considerăm paralelogramul $ABDC \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$	**2p**
	$\left\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\rvert=\left\lvert\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\rvert \Leftrightarrow AD=BC$, deci $ABDC$ este dreptunghi. Rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A	**3p**
6.	Pentru orice număr real x, avem succesiv $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ și $\cos\left(x+\pi\right)=\cos x\cos\pi-\sin x\sin\pi=-\cos x$	**3p**
	Rezultă $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2\left(x+\pi\right)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a)	$\det\left(A\left(-1\right)\right)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-1}\end{vmatrix}=$	**2p**

	$=\mathrm{e}^{-1}+0+0-0-0-0=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&x&0\\0&1&0\\0&0&\mathrm{e}^{x}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&y&0\\0&1&0\\0&0&\mathrm{e}^{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&y+x&0\\0&1&0\\0&0&\mathrm{e}^{x}\cdot\mathrm{e}^{y}\end{pmatrix}$	**3p**
	Rezultă $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&x+y&0\\0&1&0\\0&0&\mathrm{e}^{x+y}\end{pmatrix}=A(x+y)$	**2p**
c)	Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem $A(x)\cdot A(-x)=A(x-x)=A(0)=I_3$, de unde deducem că matricea $A(x)$ este inversabilă și $(A(x))^{-1}=A(-x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	**2p**
	Atunci $Y=(A(1))^{-1}\cdot B$, adică $Y=A(-1)\cdot B$. Rezultă $Y=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&\mathrm{e}^{-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-1&0\\2&0&0\\0&-\mathrm{e}&\mathrm{e}\end{pmatrix}$, de unde obținem $Y=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$.	**3p**
2.a)	$a\circ(-a)=\dfrac{1}{a}(a+a)(-a+a)-a=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{a}\cdot 2a\cdot 0-a=-a$.	**3p**
b)	Pentru orice număr real x, are loc $x\circ 0=\dfrac{1}{a}(x+a)(0+a)-a=x+a-a=x$	**2p**
	Observăm că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă, deci $0\circ x=x\circ 0=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, adică 0 este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.	**3p**
c)	$x\circ x'=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}(x+a)(x'+a)-a=0\Leftrightarrow(x+a)(x'+a)=a^2$	
	Pentru $x=-a$ avem $0\cdot(x'+a)=a^2$, imposibil, deci $-a$ nu este simetrizabil în raport cu „$\circ$”.	**2p**
	Pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-a\}$ obținem $x'=-a+\dfrac{a^2}{x+a}\in\mathbb{R}$. Deoarece legea „$\circ$” este comutativă, deducem că pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-a\}$, există $x'\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\circ x'=x'\circ x=0$, adică toate elementele din $\mathbb{R}\setminus\{-a\}$ sunt simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.	**3p**

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=(\operatorname{arctg}x)'-(x)'+\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=\dfrac{1}{x^2+1}-1+x^2=$	**3p**
	$=\dfrac{1-x^2-1+x^4+x^2}{x^2+1}=\dfrac{x^4}{x^2+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^5}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{5x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^2+1}\cdot\dfrac{1}{5x^4}=$	**3p**

	$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{5\cdot\left(x^2+1\right)} = \dfrac{1}{5}$	**2p**
c)	Cum $f'(x) = \dfrac{x^4}{x^2+1} > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Pentru orice $x > 0$, avem $f(x) > f(0)$, adică $\operatorname{arctg} x - x + \dfrac{x^3}{3} > 0$, iar de aici rezultă că $x - \dfrac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$.	**2p**
	Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x - x + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5}$. Cum $g'(x) = f'(x) - x^4$, rezultă $g'(x) = \dfrac{x^4}{x^2+1} - x^4 = \dfrac{-x^6}{x^2+1} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Atunci funcția g este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Pentru orice $x > 0$, avem $g(x) < g(0)$, adică $\operatorname{arctg} x - x + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} < 0$, iar de aici rezultă că $\operatorname{arctg} x < x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$.	**3p**
2.a)	$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx =$	**3p**
	$= \left(1 - \ln(1+x)\right)\Big\|_0^1 = 1 - \ln 2$	**2p**
b)	$I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,dx$	**2p**
	Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $x \in [0,1]$, avem $\dfrac{x^n(x-1)}{1+x} \le 0$, deci $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,dx \le 0$. Deducem că $I_{n+1} - I_n \le 0$, de unde rezultă că $I_{n+1} \le I_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.	**3p**
c)	$nI_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nx^{n-1}\cdot x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(x^n\right)'\cdot\frac{x}{1+x}\,dx = x^n\cdot\frac{x}{1+x}\Big|_0^1 - \int_0^1 x^n\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)'dx =$	**3p**
	$= \dfrac{1}{2} - \displaystyle\int_0^1 x^n\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx$	**2p**